

1. Prüfungsklausur
Stochastik für Informatiker und Lehramtsstudierende
Wintersemester 2019/2020

Beachten Sie folgende Hinweise

- Zeit: 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben auf jeweils einer eigenen Seite, dahinter einer weiteren Seite mit 2 Tabellen zur Standardnormalverteilung und schließlich noch 4 zusätzlichen Seiten zum weiteren Bearbeiten von Aufgabenteilen. Die Klammerung darf nicht gelöst werden!
- Zugelassen als Hilfsmittel ist ein einseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4. (Jedoch keine elektronischen Geräte, Taschenrechner, etc.)
- Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben oder ist die Lösung nicht eindeutig, so wird die schlechtere von beiden gewertet.
- Die Rechnungen sind in lesbarer Schrift unter den Aufgabenstellungen bzw. auf der Rückseite auszuführen. Alle zur Lösung der Aufgabe notwendigen Rechenschritte müssen aufgeschrieben werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift!

Vor- und Nachname des Studierenden (**Blockschrift**):

Matrikelnummer: _____

Studiengang: _____

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
maximale Punkte	5	6	6	7	8	4	6	8	50
erreichte Punkte									

Klausurnote:

Bonus:

Endnote:

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es werden zwei faire sechsseitige Würfel hintereinander geworfen.

- (a) Konstruieren Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, der dieses Experiment beschreibt. Begründen Sie Ihre Antwort!
- (b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der 6en.
 - (i) Geben Sie X als mathematisches Objekt explizit an.
 - (ii) Bestimmen Sie die Verteilung von X . Begründen Sie ihre Antwort vollständig.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

An einer Universität wurde eine Klausur geschrieben und die Studierenden mittels zusätzlichem Fragebogen zu ihrer Vorbereitung auf die Klausur befragt. Insgesamt haben 75% der Klausurteilnehmer*innen die Klausur bestanden. Durch den Fragebogen konnte dies spezifiziert werden. Einige Studierende hatten sich durch regelmäßige Beteiligung an den Übungen auf die Klausur vorbereitet. Diese hatten eine Bestehensquote von 90%. Ein Anteil von $\frac{1}{5}$ der Klausurteilnehmer*innen hat die Übungsaufgaben nicht regelmäßig bearbeitet, dafür aber vor der Klausur mehrere Tage intensiv gelernt. Von diesen Teilnehmer*innen hat immerhin die Hälfte die Klausur bestanden. 10% der Klausurteilnehmer gaben an, dass sie weder die Übungsaufgaben regelmäßig bearbeitet hatten, noch sich in den Tagen vor der Klausur intensiv vorbereitet hatten.

- (a) Bestimmen Sie die Bestehensquote derjenigen Klausurteilnehmer*innen, die weder Übungsaufgaben bearbeitet, noch intensiv gelernt hatten.
- (b) Nun wählen Sie unter den Klausurteilnehmer*innen, die die Klausur bestanden haben, zufällig einen aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Person weder Übungszettel bearbeitet noch intensiv gelernt?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei ein diskreter Zufallsvektor (X, Y) mit Werten in $\{-1, 0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$, dessen Verteilung durch folgende Tabelle gegeben ist:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0	0.3	0.1
0	0	0	0
1	0.2	0.2	0.2

- (a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und Y .
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- (c) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.
- (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{X \cdot Y}]$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben sei die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < c, \\ 0, & x \geq c. \end{cases}$$

einer reellwertigen Zufallsvariable X , wobei $c > 0$ eine reelle Zahl ist.

- (a) Bestimmen Sie die reelle Zahl $c > 0$ so, dass f tatsächlich die Dichte einer reellen Zufallsvariablen ist.
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- (c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \geq 1)$.
- (d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X .

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Ein fairer Würfel werde 180-mal unabhängig voneinander geworfen.

- (a) Verwenden Sie die Normalapproximation, um näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für mindestens 25 und höchstens 35 Würfe mit der Augenzahl 6 zu berechnen.
- (b) Formulieren Sie die Ungleichung von Chebyshev für Zufallsvariablen endlicher Varianz und berechnen Sie mit dieser ein $\delta \in \mathbb{N}$ möglichst klein, so dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens $30 - \delta$ und höchstens $30 + \delta$ Würfe mit der Augenzahl 6 mindestens 96% beträgt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Wir betrachten die durch $\lambda > 0$ parametrisierten Dichtefunktionen

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

einer reellwertigen Zufallsvariablen. Verwenden Sie die Maximum-Likelihood Methode um den Parameter $\lambda > 0$ zu schätzen.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

- (a) Sei X_1, \dots, X_{100} eine mathematische Stichprobe vom Umfang 100 zur Grundgesamtheit X . Dabei ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$. Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 4$ gegen $H_1 : \mu < 4$, wenn bei der Stichprobe der empirische Mittelwert $\bar{X} := \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i = 3.9$ gemessen wurde und

(i) die Varianz $\sigma^2 := 0.25$ beträgt.

(ii) die Varianz unbekannt ist und anhand der Stichprobe auf $S^2 := \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (X_i - 3.9)^2 = 0.49$ geschätzt wird.

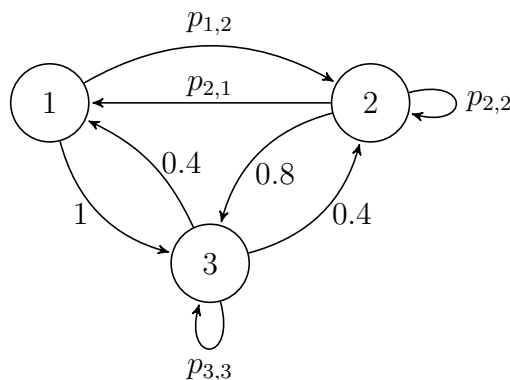
Dabei sei die Beschränkung der Fehlerwahrscheinlichkeit auf $\alpha := 5\%$ für das fälschliche Ablehnen von H_0 vorgegeben.

- (b) Aus den Messungen der Wärmeleitfähigkeit von 16 Glasfaserplatten einer bestimmten Stärke ergab sich der Mittelwert $\bar{x} = 17.1$ und der Wert $s^2 = 0.36$. Unter der Annahme, die Messwerte seien unabhängig und normalverteilt gebe man ein Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.1$ für den Erwartungswert μ der Wärmeleitfähigkeit an.

Hinweis: Einige α -Quantile $t_{n,\alpha}$ der studentschen t -Verteilung mit n Freiheitsgraden: $t_{15,0.9} \approx 1.341$, $t_{15,0.95} \approx 1.753$, $t_{16,0.9} \approx 1.337$, $t_{16,0.95} \approx 1.746$, $t_{17,0.9} \approx 1.333$, $t_{17,0.95} \approx 1.740$, $t_{99,0.9} \approx 1.2902$, $t_{99,0.95} \approx 1.6604$, $t_{100,0.9} \approx 1.290$, $t_{100,0.95} \approx 1.660$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Betrachten Sie eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ mit dem folgenden Übergangsgraphen.



Es gelte $p_{2,1} = p_{2,2}$.

- (a) Bestimmen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten und stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P auf.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: X ist ergodisch.
- (c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_{12} = 3 \mid X_{10} = 3)$.
- (d) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette und begründen Sie, ob diese eindeutig ist.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Ist $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, so zeigen die Werte der Tabelle $\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Beispielsweise ist $\Phi(-0.12) = 1 - 0.5478 = 0.4522$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Quantile der Standardnormalverteilung

Ist $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, so zeigen die Werte der Tabelle $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$. Beispielsweise ist $z_{0.1} = -1.2816$.

α	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil:

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil:

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil:

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil: